Congo Sciences
Journal en ligne de l'ACASTI et du CEDESURK
ACASTI and CEDESURK Online Journal
ISSN: 2410-4299, an International Journal

SUR LA REPRESENTATION SPECTRALE DES OPERATEURS DE HILBERT- SCHMIDT

TEBUA LIMALO KOTO Lucien*, MUBENGA KAMPOTU

Paper History

Received : September 12, 2022
Revised : June17, 2023
Accepted : July10, 2023
Published : July27, 2023

Keywords

Spectrum representation,
Hilbert-Schmidt operator,
Hilbert space

ABSTRACT

Defined between two Hilbert spaces $(X, (\cdot\,|\,\cdot)_1)$ and $(Y, (\cdot\,|\,\cdot)_2)$, the Hilbert-Schmidt operators are summarily introduced by almost all of authors. There are defined in the sommability context of the familly double into [0, +∞[as shown here.. We have proved that in the final dimension, those operators are confused with the final row operators and they are called compacts.

However in the infinite dimension, the sets of three operators are included one another. Concerning their spectrum representation, it depends on their dimension and the fact that the space $(X\,(.|.)_1)$ is separable or no separable.

Département de Mathématiques et Informatique, Faculté de Sciences, Université de Kinshasa, KINSHASA XI, Kinshasa, R.D. Congo.
* corresponding author, e-mail : tubualucien@gmail.com

I. INTRODUCTION

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont d'après AMBLARD, [2022] ; CHEBLI, [2021] ; BOUMENAKH et BOULHELA, [2020] ; GUELFAND et VILENKIN, [1967] ;GHERARA,[2019] et AMANA, [2012], une classe d'opérateurs compacts définis essentiellement entre des espaces de Hilbert. Ces derniers constituent un domaine fondamental des applications de l'analyse fonctionnelle à la physique et aux sciences de l'ingénieur (SCHWART [1970] ; GIRAULT, [2022]).

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel X muni d'un produit scalaire $(.|.)$, qui est de plus complet pour la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire.

Comme tout espace vectoriel possède une base vectorielle, tout espace de Hilbert admet, lui, une base hilbertienne [GHERARA ,[2019]]. C'est une famille $\{e_i : i \in I\}$ dans l'espace X et vérifiant les propriétés :

- la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée.

- le sous-espace M engendrée par la famille $(e_i)_{i\in I}$ est dense dans X.

La représentation spectrale ou plus généralement la théorie spectrale est la théorie étendant à des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels généraux, la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres , des matrices ([CARMONA, [2022] ; GIRAULT, [2022] ; CHIANI et ELZANATY, , [2019] ; XIMING, [2020]]). Donc, dans ce travail il est question de voir comment se présente la décomposition spectrale des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

L'étude de ces opérateurs requiert deux approches. On se limite :

- Soit aux espaces de Hilbert séparables [MARTIAS, [1981]] auquel cas on parlera des séries convergentes ;

- Soit aux espaces de Hilbert quelconques [GIRAULT, [2022]] où l'on recourt généralement à la notion des familles sommables.

Etant donné que la théorie de sommabilité est un concept plus fort et globalisant que celle des séries convergentes, les points traités ci-dessous visent les espaces de Hilbert quelconques.

1. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Dans cette section, nous définissons ce qu'on entend par un opérateur de Hilbert-Schmidt.

2.1. Proposition :

Soit $T \in LC(X,Y)$. Considérons $\{e_i : i \in I\}$ une base hilbertienne de X et $\{u_k : k \in K\}$ une base hilbertienne de Y. Alors la famille double $(\|(Te_i|u_k)_2 u_k\|_2^2)_{(i,k)\in IxK} = (|(Te_i|u_k)_2|^2)_{(i,k)\in IxK}$ est telle que :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K}|(Te_i|u_k)_2|^2\right) = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I}|(Te_i|u_k)_2|^2\right) = \sum_{(i,k)\in IxK}|(Te_i|u_k)_2|^2 \le +\infty$$

De plus $\sum_{(i,k)\in IxK}|(Te_i|u_k)_2|^2 = \sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2$

Preuve :

(1) Il suffit de poser $(|(Te_i|u_k)_2|^2)_{(i,k)\in IxK} = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in IxJ}$ et appliquer la théorème de Fubini pour les sommes pour avoir le résultat [CHATTERJI, ,[1997]]

(2) Concernant la somme $\sum_{(i,k)\in IxK}|(Te_i|u_k)_2|^2 = \sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2$, c'est l'application de l'identité de Parseval [CHATTERJI,[1998]] et du théorème de sommation par paquets [BOUVIER,[1971],et SCHWART ,[1970]].

Comme nous le voyons ; cette somme $\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2$ peut être finie ou infinie. Qu'explique-t-elle lorsqu'elle est finie ? C'est ce que nous verrons dans la suite.

2.2. Proposition

Soit $T \in LC(X,Y)$. Considérons $\{e_i : i \in I\}$ une base hilbertienne de X et $\{u_k : k \in K\}$ une base hilbertienne de Y. Alors on a :

$$\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 = \sum_{k\in K}\|T^*u_k\|_1^2$$

Preuve :

$\forall$ x $\in$ X et $\forall$ y $\in$ Y, d'après l'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|(e_i|x)_1|^2 \quad \text{et} \quad \|y\|^2 = \sum_{k\in K}|(y|u_k)_2|^2.$$

Puisque $Te_i \in Y$, $T^*u_k \in X$ et étant donné que $\{i\} \times K$ et $I \times \{k\}$ réalisent des partitions de $I \times K$, on a :

$\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 = \sum_{(i,k)\in IxK}|(Te_i|u_k)_2|^2$d'après la proposition au point 2.1.

$= \sum_{i\in I}(\sum_{k\in K}|(Te_i|u_k)_2|^2)$, d'après le théorème sur le produit des familles sommables [SCHWART,[1961]]

$= \sum_{i\in I}(\sum_{k\in K}|(e_i|T^*u_k)_1|^2)$, d'après l'adjoint hilbertien [SCHWART, [1979] et CHEBLI,, [2021]]

$= \sum_{k\in K}(\sum_{i\in I}|(e_i|T^*u_k)_1|^2)$, d'après le théorème de Fubini [CHATTERJI,[1997]]

$= \sum_{k\in K}\|T^*u_k\|_1^2$, par application de l'identité de Parseval.

Donc $\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 = \sum_{k\in K}\|T^*u_k\|_1^2$

2.3. Proposition :

Soient $T \in LC(X,Y)$. Considérons$\{e_i : i \in I\}$ et $\{f_j : j \in J\}$ deux bases hilbertiennes de X. Alors :$\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 = \sum_{j\in J}\|Tf_j\|_2^2$

Preuve .

On note que si $E_1 = \{e_i : i \in I\}$ et $E_2 = \{f_j : j \in J\}$ sont deux bases hilbertiennes de X, alors la dimension hilbertienne de E_1 est égale à la dimension hilbertienne de E_2 quelque soit $dimX$. Il en résulte que les familles $(\|Te_i\|_2^2)_{i\in I}$ et $\left(\|Tf_j\|_2^2\right)_{j\in J}$ sont équivalentes et ont mêmes sommes, c'est-à-dire $\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 = \sum_{j\in J}\|Tf_j\|_2^2$ [SCHWART, [1970]],

2.4. Définition :

Considérons *T* $\in$ *LC(X,Y).* On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt ssi il existe une base hilbertienne $\{e_i : i \in I\}$ de X telle que $\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 < +\infty$. [MESSAOUD,[2017] ,BOUMENAKH,[2020] et CHEBLI,[2021]]

Remarquons que d'après la proposition 2.3, cette définition ne dépend pas de la base hilbertienne $\{e_i : i \in I\}$de X choisie.

2.5. Remarque

D'après la définition ci-dessus, pour $T \in LC(X,Y)$, on dit que T est de Hilbert-Schmidt si la famille double $(|(Te_i|u_k)_2|^2)_{(i,k)\in IxK}$ de la proposition 2.1. est sommable dans $\mathbb{R}$ et sa somme vaut $\sum_{(i,k)\in IxK}|(Te_i|u_k)_2|^2 = \sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 < +\infty$.

Ce qui revient aussi à dire que la famille $(\|Te_i\|_2^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$, de somme $\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2 < +\infty$.

2.6. Notation

Soient $(X, (\cdot|\cdot)_1)$ et $(Y, (.|.)_2)$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{F}$= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de normes respectives $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Alors on note par $HS(X,Y)$, l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Donc on a :

$$HS(X,Y) = \{T \in LC(X,Y) : \ T \ est\ de\ Hilbert - Schmidt\}$$

Il résulte de la définition ci-dessus que

$$HS(X,Y) \subset LC(X,Y).$$

2.7. <u>Remarque</u> :

On affirmeque si X et Y sont des espaces de Hilbert, alors l'ensemble $HS(X,Y)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour les opérateurs usuelles [GUELFAND et VILENKIN , 1967]] .

2. Opérateurs de rang fini

Dans cette section, nous nous intéressons aux opérateurs de rang fini entre deux espaces de Hilbert. Un résultat important est que tout opérateur de rang fini est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

3.1. Définition

Soient $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Considérons $T\in LC(X,Y)$. On dit que T est un opérateur de rang fini ssi le sous-espace vectoriel engendré par $T[X]$ est de dimension finie, [CHEBLI, [2021]].

3.2. Notation

Soient $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors on note par $Fi(X,Y)$, l'ensemble des opérateurs de rang fini. Donc on a :

$Fi(X,Y) = \{T\in LC(X,Y) :$ T est de rang fini$\}$.

Il résulte de la définition ci-haut que

$$Fi(X,Y)\subset LC(X,Y).$$

3.3. Proposition

Soit $(X,(\cdot\mid\cdot))$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension m $\in\mathbb{N}$, avec $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot\mid\cdot)$.Alors tout endomorphisme T de X est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

<u>Preuve</u> :

Soit T un endomorphisme de X. Puisque X est par hypothèse un espace normé de dimension $m\in\mathbb{N}$, on a d'une part $T[X]<+\infty$ et d'autre part, $T\in LC(X,X)$ $[SCHWART, [1970]]$, .

Soit donnée $\{e_i : 1\le i\le m\}$, une base hilbertienne de X. $\forall i\in\{1,\cdots,m\}.$, $\|Te_i\|^2$ est un réel ≥ 0. Par conséquent $\sum_{i=1}^{m}\|Te_i\|^2$ est une somme finie, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{m}\|Te_i\|^2$ est un réel $\ge 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m}\|Te_i\|^2<+\infty$ et donc $T\in HS(X,X)$.

3.4. Théorème

Soient $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de normes respectives $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Considérons $T\in LC(X,Y)$. Si $T\in Fi(X,Y)$, alors $T\in HS(X,Y)$.

<u>Preuve</u> :

Soit C un réel >0 et $T\in LC(X,Y)$ tel que T est de rang fini. Alors par définition on a $\dim T[X]<+\infty$. Considérons $B=\{e_i : i\in I\}$ une base hilbertienne de X.

On a donc $B\subset X \Longrightarrow T[B]\subset T[X] \Longrightarrow dimT[B]<+\infty$.

D'où on peut trouver j = fini ⊂ I

Tel que: $Te_i = Te_j$ si $j\in J$ et $Te_i=\theta$ $si\ i\notin J$

- ❖ $\forall i\in A = fini \subset (I\setminus J)$, $Te_i=\theta$

$\Longrightarrow \|Te_i\|_2^2=0$ $\forall i\in A$. $\Longrightarrow \sum_{i\in A}\|Te_i\|_2^2 = 0$

$\Longrightarrow \sum_{i\in(I\setminus J),}\|Te_i\|_2^2=0$

- ❖ Pour $E=J$, l'ensemble $\{Te_j : j\in J\}$ est fini

Par suite les $\|Te_j\|_2$ sont des réels positifs en nombre fini. D'où il existe un réel $r=\sqrt{\frac{C}{1+cardE}}$ tel que $\|Te_j\|_2\le r$, $\forall j\in E$;

C'est-à-dire $\|Te_j\|_2\le\sqrt{\frac{C}{1+cardE}}$,$\forall j\in E$

$\Longrightarrow \|Te_j\|_2^2\le\frac{C}{1+cardE}$, $\forall j\in E$

$\Longrightarrow \sum_{j\in E}\|Te_j\|_2^2\le cardE\cdot\frac{C}{1+cardE}\le C$

C'est-à-dire $\sum_{j\in J}\|Te_j\|_2^2\le C$. Or $I=J\cup(I\setminus J). D'où$

$$\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2=\sum_{j\in J}\|Te_j\|_2^2+\sum_{i\in(I\setminus J)}\|Te_i\|_2^2=\sum_{j\in J}\|Te_j\|_2^2<C$$

Donc $\sum_{i\in I}\|Te_i\|_2^2<C$.

Ce qui signifie d'après 2.4 que $T\in HS(X,Y)$.

3.5. Remarque

Il découle du théorème ci-dessus que si $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$, $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ sont des espaces de Hilbert sur un même corps $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et T :X → Y un opérateur linéaire, alors on a l'inclusion : $Fi(X,Y)\subset HS(X,Y)$. Et puisque d'après 2.6, on a $HS(X,Y)\subset LC(X,Y)$, il vient que

$$Fi(X,Y)\subset HS(X,Y)\subset LC(X,Y)$$

4. Opérateurs compacts

4.1. Définition

Soient $(X,\|\cdot\|_1)$ et $(Y,\|\cdot\|_2)$ deux espaces normés sur un corps $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un opérateur linéaire $T:X\longrightarrow Y$ est dit compact si quel que soit un borné A de X (pour $\|\cdot\|_1$), l'ensemble T[A] est relativement compact $[CHEBLI,[2021]]$, c'est-à-dire si l'ensemble $\overline{T[A]}$ est compact dans Y.

On note :

$CO(X,Y)=\{T : X\longrightarrow Y/$ Test linéaire et compact$\}$.

4.2. <u>Remarque</u> :

Les caractérisations de ces opérateurs et la structure vectorielle de leur espace sont développées dans bon nombre d'ouvrages d'Analyse fonctionnelle et autres monographies [CHATTERJI, [1970] ;SCHWART, [1979] ; DIEUDONNE , , [1969] ; TRENOGUINE,[1985] , AMANA,[2012] , BOUMENAKH et BOULHELA , [2020] et CHEBLI ,[2021]].

.4.3. Théorème

Soient $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de normes respectives $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Si T ∈ HS(X,Y), alors T ∈ CO(X,Y).

<u>Preuve</u> :

Soit $T \in \mathrm{HS}(X,Y)$ et $\{e_i : i \in I\}$ une base hilbertienne de X. Définitions une famille d'opérateurs de rang fini par la formule :

$$A_{j,k}\, u = (u|e_j)_{1,k}\ , \forall j,k \in I \text{et } \ \forall\, u \in X.$$

(i) Montrons que la famille $\{A_{j,k} : j,k \in I\}$ est un système orthonormal dans $HS(X,Y)$.

En effet, ∀ i ∈ I, on a :

$$(A_{j,k}|A_{\ell,k})_{HS} = \sum_{i\in I} (A_{j,k}e_i|A_{\ell,k}e_i)_2\ , \quad \forall j,k,\ell \in I$$

$$= \sum_{i\in I} (e_i|e_j)_{1,k} \cdot \overline{(e_\iota|e_\ell)_{1,k}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{Si } \ i \neq j \text{ ou } i \neq \ell \\ 1 & \text{si } \ i = j \ \text{ et } i = \ell \end{cases}$$

(ii) Montrons que la famille $\{A_{j,k} : j,k \in I\}$ est totale.

Mais alors on a $(T|A_{j,k})_{HS} = (Te_j|e_k)_2$.

Si $(T|A_{j,k})_{HS} = 0\ \forall j,\ k \in I$, , alors $(Te_j|e_k)_2 = 0 \quad \forall_j$, $k \in I$.

et donc $Tej = \theta \implies T = \theta$.

Il résulte de (i) et (ii) que la famille $\{A_{j,k} : j,k \in I\}$ est une base orthonormée de $HS(X,Y)$.

Selon les caractérisations de la compacité d'une application linéaire [TAHAR, 2021], on conclut que T est adhérent à l'ensemble des opérateurs de rang fini et donc T est compact.

4.4.Théorème :

(1) Si $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ sont des espaces de Hilbert sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de normes respectives $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, alors on a :
$Fi(X,Y) \subset HS(X,Y) \subset CO(X,Y) \subset LC(X,Y)$.

(2) Soit $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ des espaces de Hilbert sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tel que X ou Y est de dimension finie .Alors
$$Fi(X,Y) = HS(X,Y) = CO(X,Y) = LC(X,Y)$$
.

<u>Preuve</u> :

(1) Notons qu'en 3.5 et 4.3. nous avons établi les inclusions $Fi(X,Y) \subset HS(X,Y)$ et $HS(X,Y) \subset CO(X,Y) \Rightarrow Fi(X,Y) \subset HS(X,Y) \subset CO(X,Y)$.

En supposant X et Y normés donc sans exiger que X et Y soient des espaces de Hilbert, nous savons que $CO(X,Y) \subset LC(X,Y)$ [*BOUMENAKH et BOULHELA* ,2020] ,*SCHWART*, [1

Ce qui achève (1).

(2) Si $dimX < +\infty$ alors $T \in LC(X,Y) \Rightarrow dimT[X] \leq dimX < +\infty$ d'où $T \in Fi(X,Y)$. Si $dimY < +\infty$ alors $T \in LC(X,Y) \Rightarrow dimT[X] \leq dimY < +\infty$ et donc $T \in Fi(X,Y)$. Par suite $LC(X,Y) \subset Fi(X,Y)$, d'où le résultat à cause de (1)

5.<u>Représentation spectrale des opérateurs des Hilbert-Schmidt</u>

5.1. Théorème

Soit $(X,(\cdot\mid\cdot))$ un espace de Hilbert séparable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de norme $\|\cdot\|$. Considérons $T \in LC(X,X)$ tel que T est hermitien compact et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres non nulles de T. Alors T admet la représentation spectrale :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$$

oùP_n est la projection orthogonale de X sur $E_{\lambda_n} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_n \mathrm{Id}_X)$.

<u>Preuve</u> :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ les termes de la suite des valeurs propres différentes de 0 de T. D'après le théorème spectral , on a pour tout n ∈ℕ :

$$|\lambda_n| > |\lambda_{n+1}| \text{ [CHATTERJI, [1998]],}$$

Toujours par le même théorème on sait que l'ensemble σ(T) n'est pas vide. Et puisque T est hermitien compact, il existe $\lambda_1 \in \sigma(T)$ tel que

$$|\lambda_1| = \|T\|_*$$

La suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ peut être finie ou infinie dénombrable. Si elle est infinie, d'après le théorème spectral, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0 \quad , \text{(i)}$$

Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour tout k dans $\{1,2,\cdots,q\}$, $E_{\lambda_k} = (T - \lambda_k \mathrm{Id}_X)$ est le sous-espace propre correspndant à la valeur propre $\lambda_k \neq 0$. On sait de plus que E_{λ_k} est de dimension finie et on a $E_{\lambda_k} \perp E_{\lambda_\ell}$ pour $k \neq \ell$ dans $\{1,2,\cdots,q\}$.

Considérons P_k le projecteur de X sur E_{λ_k}. Alors : $P_k \cdot p_\ell = P_k \delta_{k_\ell}$, où p_ℓ désigne la fonction spectrale de T avec

$$p_\ell(\lambda) = \begin{cases} 0 \ \text{si} & \lambda < m = inf\{(Tx|x) : \|x\| = 1\} \\ I \ \text{si} & \lambda \geq M = \sup\{(Tx|x) : \|x\| = 1\} \end{cases}$$

et$I = \sum_{k=1}^{q} P_k$ pour $\lambda \geq \lambda_q$.

De ce qui précède, on peut écrire :

$$IoT = \sum_{k=1}^{q} To\,P_k \quad , \text{(ii)}$$

Si x ∈ X, alors $P_k x \in E_{\lambda_k}$. Il s'en suit que $\mathrm{ToP_k x} = \lambda_k P_k x$, c'est-à-dire ∀ $k = 1, 2, \dots, q$, on a

$$\mathrm{ToP_k} = \lambda_k P_k \text{ (iii)}$$

D'où, on a: $p_\ell o\mathrm{ToP_k} = \delta_{k_\ell}\lambda_k P_k = \delta_{k\ell}\ \mathrm{ToP_k}$

Posons $(e_{k_t})_{t=1}^{\ell_k}$, $\ell_k \in \mathbb{N}$, la base orthogonalede E_{λ_k}.Alors $P_k = \sum_{t=1}^{\ell_k}(\cdot\,|e_{k_t})e_{k_t}$ et$P_k x = \sum_{t=1}^{\ell_k}(x|e_{k_t})e_{k_t}$, ∀ x ∈ X.

Ainsi donc ∀ $x \in X$., on a :

$$\begin{aligned} P_k oTx &= \sum_{t=1}^{\ell_k}(Tx|e_{k_t})e_{k_t} \\ &= \sum_{t=1}^{\ell_k}(x|Te_{k_t})e_{k_t} \\ &= \sum_{t=1}^{\ell_k}(x|\lambda_k e_{k_t})e_{k_t} \\ &= \lambda_k \sum_{t=1}^{\ell_k}(x|e_{k_t})e_{k_t} \\ &= \lambda_k . P_k x \\ &= ToP_k x \end{aligned}$$

$\Rightarrow P_k oTx = ToP_k x$, (iv)

Si nous notons par $S_1 = P_1$, $S_2 = P_1 + P_2$, … , nous obtenons la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ telle que$S_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ et on a :

$$\mathrm{ToS_n} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{ToP_k} \quad \text{, (v)}$$

Par suite, on a :ToS_n= S_no$\mathrm{To}S_n$, (vi)

Les relations (iv) et (vi) impliquent :

$$\mathrm{S_n oT} = \mathrm{S_n oToS_n} = \mathrm{ToS_n} \text{ , (vii)}$$

Puisque S_n est le projecteur de X sur $\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{\lambda_k}$, on saitque $(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})$ est le projecteur de X sur $\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{\lambda_k}^{\perp}$ $[TRENOGUINE, [1985]]$. Appliquons (vii) au projecteur $(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})$:

$To(Id_X - S_n) = \mathrm{T} - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\ \ \mathrm{P_k} = (\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{oTo}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n}) = (\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{oT}$, (viii)

Comme T est compact et S_n borné, d'après les propriétés des opérateurs compacts,$To(Id_X - S_n)$est compact [SCHWART, [1970] ; TRENOGUINE , [1985]], . Montrons que les valeurs propres non nulles de $To(Id_X - S_n)$sont les nombres $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$, etc.

En effet, supposons que :

$$\big(\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\big)\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}, \lambda \neq 0 \text{ et } \mathrm{x} \neq \theta$$

Alors

$$[(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{oTo}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})]\, x = \lambda(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})x$$

D'où $\big(\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\big)\mathrm{x} = \lambda(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})x$

Ce qui prouve que, si x est un vecteur propre de $\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})$ alors $(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})x$ est un vecteur propre de T, donc que les valeurs propres non nulles de $(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{oT}$ appartiennent à l'ensemble $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ des valeurs propres de T.

Pour $\lambda = \lambda_k$, on a :

$$(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{x} = \mathrm{P_k o}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ \mathrm{P_k}(\mathrm{x}) & \text{si } k > n \end{cases}, \text{ (ix)}$$

Donc $\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})$ a pour valeurs propres l'ensemble $\{\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots\}$. Et puisque T est compact, et que $\|T\|_* = |\lambda_1|$, on a donc

$$\|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\|_* = |\lambda_{n+1}|$$

- Supposons que le nombre N de valeurs propres non nulles de T est fini, c'est-à-dire $N \in \{1, 2, , \cdots n\}$, n ∈ℕ. Alors d'après la relation (ix), on a $\|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{x}\| = 0$.
  $\Rightarrow$L'ensemble$\{\|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{x}\| : \mathrm{x} \in \mathrm{X} \text{ et } \|\mathrm{x}\| = 1\}$ est majoré par 0
  $\Rightarrow 0 \leq \sup\{\|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\mathrm{x}\| : \mathrm{x} \in \mathrm{X} \text{ et } \|\mathrm{x}\| = 1\} \leq 0$
  $\Rightarrow \|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\|_* = 0$, (x)
  Mais alors la relation (x) donne : (v)
  $$0 = \|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\|_* = \|\mathrm{T} - \mathrm{ToS_n}\|_*$$
  $$\overset{(V)}{\cong} \left\|\mathrm{T} - \sum_{k=1}^{N}\mathrm{ToP_k}\right\|_* = \left\|\mathrm{T} - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k \mathrm{P_k}\right\|_*$$
  $$\Rightarrow \left\|\mathrm{T} - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k \mathrm{P_k}\right\|_* = 0$$
  $\Rightarrow\ \mathrm{T} - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k \mathrm{P_k} = z$ (avec z l'opérateur nul)
  $\Rightarrow\ \mathrm{T} = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k \mathrm{P_k}$,(xi)

- Pour N infini, alors on applique la relation (i) pour avoir :
  $$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\|_* &= \lim_{n\to+\infty}|\lambda_n|\|\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n}\|_* \\ &= \left|\lim_{n\to+\infty}\lambda_n\right|\|\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n}\|_* = 0 \end{aligned}$$
  Or $\|\mathrm{To}(\mathrm{Id_X} - \mathrm{S_n})\|_* = \|\mathrm{T} - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathrm{P_k}\|_*$.
  D'où il vient que $\lim_{n\to+\infty}\|\mathrm{T} - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathrm{P_k}\|_* = 0$

Ce dernier résultat revient à dire :

∀réel ε > 0, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n (n \in \mathbb{N}\ \ etn \geq k) \Rightarrow \|\mathrm{T} - \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n \mathrm{P}_n\|_* < \epsilon$$

[DONEDDU, [1984]]

Ce qui signifie que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n \mathrm{P}_n$ est convergente dans $LC(X,X)$(pour $\|\cdot\|_*$) et elle converge vers T. On écrit :$\mathrm{T} = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n \mathrm{P}_n$

5.2 Théorème

Soit I un ensemble infini non dénombrable et $(\mathrm{X}, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espace de Hilbert de dimension hilbertienne égale $card I > \chi_1$. Considérons $T \in LC(X,X)$ tel que $T \in HS(X,X)$ et la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de valeurs propres non nulles de T. Alors T admet la représentation spectrale :

$$T = \sum_{i\in I} \lambda_i P_i$$

où P_i désigne la projection orthogonale de X sur $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_i \mathrm{Id}_X)$.

Preuve :

Soit un réel $\varepsilon > 0$ et considérons $\{\lambda_i : i \in I\} = \sigma_P(T)$, ensemble infini non dénombrable . Alors on sait que $\sigma_P(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_i : i \in I\}$ est tel que $\lim \left(S_K, K \in \mathfrak{F}(I), \leq\right) = 0$

où $\left(S_K, K \in \mathfrak{F}(I), \leq\right)$ est la suite généralisée engendrée par la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$. Soit $J \subset I$ avec J finie. Alors pour tout $i \in J$, $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_i \mathrm{Id}_X)$ est le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda_i \neq 0$. Aussi, sait-on que E_{λ_i} est de dimension finie et on a $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_t}$ pour $i \neq t$ dans J.

Posons : $G_J = \bigoplus_{i\in J} E_{\lambda_i}$ et $F_J = G_J^{\perp}$

D'après SCHWART,[1970] et KOITA , [2021], on a $F_J \subset X$ et T hermitien $\Longrightarrow T[F_J] \subset F_J$ et l'opérateur T_{F_J} induit par T sur F_J est un opérateur hermitien compact tel que

$$\Sigma_P\left(T_{F_J}\right) \setminus \{0\} = (\{\lambda_i : i \in I\} \setminus \{\lambda_i : i \in J\})$$
$$= \{\lambda_i : i \in I \setminus J\}$$

De plus, la norme d'opérateur de T_{F_J} est donnée par :

$$\left\|T_{F_J}\right\|_* = \max\{|\lambda_i| : i \in I \setminus J\} \quad , \quad \text{(i)}$$

[CHATTERJI, [1998]]

Pour chaque $i \in J$, considérons P_i le projecteur de X sur E_{λ_i}. Si $x \in X$, alors $P_i x \in E_{\lambda_i}$. Il s'en suit que $ToP_i\, x = \lambda_i P_i\, x$; c'est-à-dire pour chaque $j \in J$, $ToP_i = \lambda_i\, P_i$, (ii)

Et comme $G_J = \bigoplus_{i\in J} E_{\lambda_i}$, le projecteur orthogonal de X sur G_J est $\sum_{i\in J} P_i$. Dès lors pour $x \in X$, on a :

$$x = x_J + y_J \text{ avec } x_J = \sum_{i\in J} P_i\, x \in G_J \text{ et } y_J \in F_J$$

D'où $x - \sum_{i\in J} P_i\, x = x - x_J = y_J \in F_J$.

On obtient d'une part,

$$\left\|T\left(x - \sum_{i\in J} P_i x\right)\right\| = \left\|Tx - T\left(\sum_{i\in J} P_i x\right)\right\|,$$

$$= \left\|Tx - \sum_{i\in J} (ToP_i)x\right\|, \text{ (iii)}$$

D'autre part,

$$\left\|T\left(x - \sum_{i\in J} P_i x\right)\right\| = \left\|T_{F_J}\left(x - \sum_{i\in J} P_i x\right)\right\|$$

$$\leq \left\|T_{F_J}\right\|_* \left\|x - \sum_{i\in J} P_i x\right\| \text{ , (iv)}$$

Mais puisque $\sum_{i\in J} P_i x$ est le projecteur de X sur G_J, on sait que l'application $\left(Id_X - \sum_{i\in J} P_i\right)$ est le projecteur de X sur $G_J^{\perp} = F_J$ et d'après les propriétés de la projection orthogonale on a :

$\left\|x - \sum_{i\in J} P_i x\right\| = \left\|\left(\mathrm{Id}_X - \sum_{i\in J} P_i\right)x\right\| \leq \|x\|$(v) [TRENOGUINE, [1985]],

En tenant compte de (v), la relation (iv) devient :

$$\left\|T\left(x - \sum_{i\in J} P_i x\right)\right\| \leq \left\|T_{F_J}\right\|_* \cdot \|x\|$$
$$= \max\{|\lambda_i| : i \in I \setminus J\} \cdot \|x\|, \text{ (vi)}$$

Or d'après (ii), $(ToP_i) = \lambda_i P_i$.

D'où (iii) s'écrit :

$$\left\|T\left(x - \sum_{i\in J} P_i x\right)\right\| = \left\|Tx - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i x\right\|$$
$$= \left\|\left(T - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i\right)x\right\| \text{ , (vii)}$$

Les relations (vii) et (vi) donnent :

$$\left\|\left(T - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i\right)x\right\| \leq \max\{|\lambda_i| : i \in I \setminus J\} \cdot \|x\|$$

Pour $\|x\| \neq 0$, on recourt aux résultats sur les familles sommables dans un espace de Banach [BOUVIER,[1971]] pour conclure que l'ensemble

$K = \left\{\lambda_i : i \in I \text{ avec } |\lambda_i| \geq \frac{\varepsilon}{\|x\|}\right\}$est fini.

Mais alors $\forall$ J $\in\mathfrak{F}$(I) avec $K \subset J$ et K fini, on a :

$$\left\|\left(T - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i\right)x\right\| \leq \max\{|\lambda_i| : i \in I \setminus J\} \cdot \|x\|$$
$$\leq \max\{|\lambda_i| : i \in I \setminus K\} \cdot \|x\|$$
$$< \varepsilon.$$

Donc $\left\|\left(T - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i\right)x\right\| < \varepsilon$

Et ainsi l'ensemble

$D = \left\{\left\|\left(T - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i\right)x\right\| : x \in X \text{ et } \|x\| = 1\right\}$est majoré par ε. Il s'en suit que $supD \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\left\|\left(T - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i\right)\right\|_* \leq \varepsilon$

Résumé : $\forall$ réel $\varepsilon > 0$, $\exists$ K $\in\mathfrak{F}$(I) tel que

$K \subset J \subset I$ et J fini $\Longrightarrow \left\|\left(T - \sum_{i\in J} \lambda_i P_i\right)\right\|_* \leq \varepsilon$.

Donc d'après la caractérisation de familles sommables, la famille $(\lambda_i P_i)_{i\in I}$ est sommable dans $LC(X, X)$ [pour $\|\cdot\|_*$], de somme T [BOUVIER, [1971] ; CHOQUET, [1964]] . D'où on écrit par définition

$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i P_i$$

6. Conclusion

Cette étude a conduit à 2 principaux résultats :

1. *Le lien entre les ensembles d'opérateurs* $Fi(X,Y)$, $HS(X,Y)$; $CO(X,Y)$ *et* $LC(X,Y)$

1.a) Si $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ sont des espaces de Hilbert sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de normes respectives $\|\cdot\|_1$et $\|\cdot\|_2$, alors on a :

$$\boldsymbol{Fi(X,Y) \subset HS(X,Y) \subset CO(X,Y) \subset LC(X,Y)}$$

1.b) Soient $(X,(\cdot\mid\cdot)_1)$ et $(Y,(\cdot\mid\cdot)_2)$ des espaces de Hilbert sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tels que X ou Y est de dimension finie. Alors

$$\boldsymbol{Fi(X,Y) = HS(X,Y) = CO(X,Y) = LC(X,Y)}$$

2. *La représentation spectrale des opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soir X un espace de Hilbert sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.a) Si T est hermitien de rang fini, alors

$$T \in HS(X,X) = Fi(X,X) = CO(X,X) = LC(X,X)$$

et T admet la représentation spectrale :

$T = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k$, (N $\in\mathbb{N}$) ;avecP_k la projection orthogonale de X sur $E_{\lambda_k} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_k \mathrm{Id}_X)$,

et T la somme *d'un nombre fini des termes*.

2.b) Si T est de dimension infinie et X est séparable, alors

$$T \in HS(X,X) \Rightarrow T \in CO(X,X) \cap Herm(X,X)$$

et T admet la décomposition spectrale :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$$

oùP_n est la projection orthogonale de X sur $E_{\lambda_n} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_n \mathrm{Id}_X)$ et T est la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$, *série convergente* dans $LC(X,X)$ [pour $\|\cdot\|_*$].

2.c) Si T est de dimension infinie et X est non séparable, alors

$$T \in HS(X,X) \Rightarrow T \in CO(X,X) \cap Herm(X,X)$$

et T admet la représentation spectrale : $T = \sum_{i\in I} \lambda_i P_i$

et avec P_i la projection orthogonale de X sur $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_i \mathrm{Id}_X)$, T la somme de *la famille* $(\lambda_i P_i)_{i\in I}$ *sommable* dans $LC(X,X)$ [pour $\|\cdot\|_*$]. Et I l'ensemble infini non dénombrable tel que car dI = dimension hilbertienne de X.

Résumé

Définis entre deux espaces de Hilbert $(X\,(.|.)_1)$ et $(Y,(.|.)_2)$, les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont présentés de façon sommaire par la quasi-totalité d'auteurs. Ils sont en effet définis dans le contexte de sommabilité d'une famille double dans [0, +∞[comme on peut le voir à travers ce texte. Nous avons montré qu'en dimension finie, ces opérateurs sont confondus avec les opérateurs de rang fini et ceux dits compacts. Tandis qu'en dimension infinie, les espaces de ces trois types d'opérateurs sont inclus les uns dans les autres. Pour ce qui est de leur représentation spectrale, cela tient compte de leur dimension et du fait que l'espace $(X\,(.|.)_1)$ est séparable ou non séparable.

Mots clés : Représentation spectrale, opérateur de Hilbert-Schmidt, espace de Hilbert.

REFERENCES

AMANA ABDILLAH S., [2012]. Extensions au cadre Banachique de la notion d'opérateur de Hilbert-schmidt, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.

AMBLARD P-O . & All [2022] : Mesures d'indépendance dans des rkHs en limite plate, Gretsi 2022 AmblBTU-vf2(1). Hal science.

BOUMENAKH H. et BOULHELA S., [2020] : Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint, Mémoire de master, Université Abd Elhafid BOUSSOUF Mila.

BOUVIER A., [1971] Théorie élémentaire des séries, Hermann, Paris.

CARMONA P., [2022] : Asymtotic of the largest Floquet multiplier for cooperative matrices, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : *Mathématiques*, 6, 31 ,4, 1213-1221.

CHATTERJI S-D, [1998] Cours d'Analyse : Volume 3, Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Lausanne.

CHATTERJI S-D, [1997] Cours d'Analyse 2 : Analyse complexe, Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Lausanne.

CHEBLI Z.[2021] : Les opérateurs de Hilbert-Schmidt, Mémoire de master, Université Mohamed Boudiaf, M'sila.

CHIANI M. et ELZANATY A., [2019] : The Lora Modulation for IoT : Waveform properties and Spectral Analysis*. ArXIV* : 1906, 04256 [cs.NI]

CHOQUET G., [1964] Cours d'Analyse, Tome II, Topologie, Masson et Cie, Paris.

DIEUDONNE J. , [1969] Eléments d'Analyse ,Tome 1, Gauthier-Villars, Paris.

DONEDOU A., [1984] Cours de Mathématiques, Tome 5, Fonctions vectorielles-Equations, Différentielles, Vuibert, Paris.

GHERARA A., [2019]Opérateurs compacts et applications, Mémoire de master, Université de Mohamed KHIDER, BISKRA.

GIRAULT B., [2022] : Transformée de Fourier sur graphe pour les espaces de Hilbert quelconques. GRETSI 2022-XXVIIIème colloque Francophone de Traitement du signal et des images, sep. 2022, Nancy, France. Hal-03841935.

GUELFAND L.M. & VILENKIN N.Y., Les distributions, Tome 4 ; Application de L'Analyse harmonique, Dunod, Paris.

KOÏTA M., [2021] : Analyse spectrale des opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman et Applications, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

MARTIAS C., [1981] : Filtrage non linéaire dans des espaces de Hilbert réels et séparables. Annales scientifiques de l'université de clermont. *Mathématiques*, 69 , .87-113 .

MESSAOUD G., [2017] Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, Thèse de doctorat, Université de M'SILA.

SCHWART L., [1970] Analyse 2è partie, Topologie et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris.

SCHWART L., [1979] Analyse hilbertienne ; Hermann, Paris.

SCHWART L., [1961] Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris.

TAHAR B., [2021] : Approximation numérique de certaines équations intégrales de 1ère espèce par des méthodes spectrales, Thèse de doctorat, Université BADJI MOKHTAR, ANNABA.

TRENOGUINE V., [1985] Analyse fonctionnelle, Editions MIR, MOSCOU.

XIMING CHEN et All : [2020] Bonds of the spectral Radius of Diagraphs from subraph counts, society for Indudtrial and Applied Mathematic ; SIAM *J. MatrixANAL. Appl*. 41, 2, 525-553.