Congo Sciences

Journal en ligne de l'ACASTI et du CEDESURK
ACASTI and CEDESURK Online Journal
ISSN: 2410-4299, an International Journal

Structure d'Algèbre de Lie-Rinehart sur l'Espace des Feuilles

DIANGITUKULU NDIMBA Samuel* et MUSESA LANDA Alain.

Paper History
Received:
May 20, 2019
Revised:
August 16, 2019
Accepted:
October 20, 2019
Published:
November 27, 2019

Keywords:
Leaf space, simple foliation, transverse vector fields, differential operator of order ≤ 1, Lie-Rinehart algebra.

ABSTRACT

Lie-Rinehart Algebra Structure on the Leaf Space

We consider a transversally oriented foliation $\mathcal{F}$ defined on a smooth manifold M. In this paper, we denote by $M/\mathcal{F}$ the leaf space of $\mathcal{F}$, $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ its ring of basic functions, $l_\mathcal{F}(M)$ its $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module of the transverse vector fields on $M/\mathcal{F}$ and $Diff_\mathbb{R}[C_b^\infty(M,\mathcal{F})]$ the $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module of differential operators of order ≤ 1 of $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$. We establish that if $\mathcal{F}$ is a simple foliation on M, its leaf space $M/\mathcal{F}$ is provided with a Lie-Rinehart algebra structure and let us deduce from it that it is not possible to provide the leaf space $M/\mathcal{F}$ of a Lie-Rinehart algebra structure if $\mathcal{F}$ is not simple.

Département de Mathématiques et Informatique, Faculté de Sciences, Université de Kinshasa, B.P. 190 Kinshasa XI, République Démocratique du Congo.

* To whom correspondence should be addressed: ***diangitukulusamuel@gmail.com***

INTRODUCTION

Un feuilletage transversalement orienté de codimension q (ou de dimension $n-q$) sur une variété différentielle M, de dimension n, est le noyau d'une q-forme α complètement intégrable sur M,c'est-à-dire $\alpha \wedge d\alpha = 0$ [MUSESA, 2005].

Le couple $(M,\mathcal{F})$ est dit variété feuilletée. De manière intuitive, un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p d'une variété différentielle M, de dimension $n = p + q$, est une partition de M en sous-variétés immergées de dimension fixe p, appelées feuilles qui, localement sont entassées nettement. Le sous-fibré tangent aux feuilles de $\mathcal{F}$ est noté $T\mathcal{F}$, l'ensemble des sections de $T\mathcal{F}$, c'est-à-dire l'algèbre de Lie réelle des champs tangents aux feuilles est noté $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ [TONDEUR, 1997]. Le fibré quotient $Q = TM/T\mathcal{F}$ est appelé le fibré transverse de $\mathcal{F}$. Les sous-fibrés Q et $T\mathcal{F}$ sont complémentaires dans TM. L'espace des feuilles est un espace dans lequel les feuilles de feuilletage sont considérées comme des points. La dimension de $\mathcal{F}$ est la dimension de ses feuilles. La codimension q de $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$.

Un feuilletage $\mathcal{F}$ induit par une submersion est appelé feuilletage simple.

Lorsque $(M,\mathcal{F})$ est une variété feuilletée et $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie réelle des champs de vecteurs tangents aux feuilles, une fonction différentielle f sur M est dite une fonction basique si et seulement si f est constante le long des feuilles de $\mathcal{F}$. L'ensemble des fonctions basiques de $(M,\mathcal{F})$ est noté $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$.

Un champ de vecteurs Y sur M est dit champ de vecteurs feuilleté si $[X,Y] \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. L'ensemble $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$ des champs de vecteurs feuilletés est une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M. L'algèbre de Lie réelle $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$ contient la sous-algèbre de Lie réelle $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ des champs de vecteurs tangents aux feuilles.

Au niveau infinitésimal, la géométrie tangente (la géométrie des feuilles) est modelée par la distribution $T\mathcal{F}$ associée aux feuilles et la géométrie transverse (géométrie de l'espace des feuilles) est modelée par le complémentaire Q de $T\mathcal{F}$ dans TM.

Il est à noter que tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ définit une section différentiable $\bar{X}$ de Q. Le champ de vecteurs $\bar{X}$ est appelé champ de vecteurs transverse. L'espace des champs de vecteurs transverses est noté $l_\mathcal{F}(M)$.

En général, en géométrie transverse l'espace quotient $M/\mathcal{F}$ n'est pas une variété différentielle. Par conséquent, les concepts de champ de vecteurs et de dérivation sur l'anneau des fonctions ne coïncident pas. En particulier, si $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple, l'espace des feuilles est une variété différentielle, $l_{\mathcal{F}}(M)$ peut être identifié avec l'algèbre de Lie réelle des dérivations de l'anneau $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ des fonctions basiques et $\Omega_b(M,\mathcal{F})$ avec le $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module des formes multilinéaires alternées sur $l_{\mathcal{F}}(M)$.

Dans ce papier, sous la condition que le feuilletage $\mathcal{F}$ est simple, nous munissons l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart. Nous nous sommes basés sur la représentation définie sur l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ et à valeurs dans le module des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 sur l'anneau des fonctions basiques.

Cet article s'articule autour de deux sections. La première section, consacrée aux préliminaires, présente des outils de la géométrie transverse utiles pour la suite de cet article. Un rappel en particulier, les notions de fonction basique, de champ de vecteurs transverse et de forme basique. La deuxième section se focalise sur la structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur l'espace des feuilles.

1. Préliminaires

Soit M une variété différentielle de dimension finie n, d l'opérateur de différentiation extérieure et TM le fibré vectoriel tangent à M. On note $C^\infty(M)$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ sur M et $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module de champs de vecteurs sur M.

Définition 1.1. Soit un entier q tel que $1 \leq q \leq n$, un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q (ou de dimension $n-q$) sur M est le noyau d'une q-forme α complètement intégrable sur M. Le couple $(M,\mathcal{F})$ est une variété feuilletée [HECTOR and HIRSCH, 1981].

Considérons un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension $q \leq n$ sur une variété lisse M de dimension n. La relation $\sim$ sur M qui identifie les points de M appartenant dans une même feuille est une relation d'équivalence [GODBILLON, 1991].

Définition 1.2. L'ensemble quotient de M par la relation $\sim$ définie ci-dessus est noté $M/\mathcal{F}$ et est appelé espace des feuilles de $\mathcal{F}$. Un feuilletage $\mathcal{F}$ est dit simple si son espace des feuilles est une variété différentielle.

Exemple 1.1. Feuilletage simple [MOLINO, 1988].

Soit $\pi : M \longrightarrow W$ une submersion d'une variété lisse M dans une variété lisse W de dimension q. La distribution $P = Ker\,\pi_*$ est complètement intégrable (elle est une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie réelle des champs de vecteurs sur M). Le feuilletage associé à cette submersion est appelé feuilletage simple. Les feuilles de ce feuilletage simple sont les composantes connexes des images réciproques des points de W. En particulier, toute fibration $(E,\pi,B;F)$, où E est l'espace total, π l'application projection de E sur B et F le fibre typique, définit un feuilletage simple.

Définition 1.3. Soit $(M,\mathcal{F})$ une variété feuilletée. Une fonction $f \in C^\infty(M)$ est dite fonction basique, si et seulement si pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, $X.f = 0$. L'ensemble des fonctions basiques est noté $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$.

La proposition suivante donne deux autres définitions équivalentes du concept de fonction basique.

Proposition 1.1. [MOLINO, 1988]. Soit f une fonction sur une variété feuilletée $(M,\mathcal{F})$ de codimension q. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- f est une fonction basique;
- f est constante sur chaque feuille;
- dans une carte adaptée $(x^1,\dots,x^p,y^1,\dots,y^q)$,

f est une fonction seulement des variables transverses $(y^1,\dots,y^q)$.

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple, alors $C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \equiv C^\infty(M/\mathcal{F})$.

Définition 1.4. Un champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(M)$ est dit champ de vecteurs feuilleté de $\mathcal{F}$, si

$[X,Y] \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

L'ensemble $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$ des champs de vecteurs feuilletés est une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{X}(M)$, des champs de vecteurs sur M. L'algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$, des champs de vecteurs tangents aux feuilles est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$.

Dans une carte adaptée $(x^1,\dots,x^p,y^1,\dots,y^q)$, un champ de vecteurs feuilleté X s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^{p} a_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{q} b_j(y)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

Proposition 1.2. [MOLINO, 1988]. Soit $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ et $X,Y \in \mathcal{L}(M,\mathcal{F})$. Alors on a:

- $[X,Y] \in \mathcal{L}(M,\mathcal{F})$
- $fX \in \mathcal{L}(M,\mathcal{F})$
- $X.f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$

Il suit de la Proposition (1.2) ci-dessus que $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$ est un $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module et ses éléments agissent comme des dérivations sur $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$. L'ensemble des champs de vecteurs feuilletés sur $(M,\mathcal{F})$ ne coïncide pas avec l'ensemble des dérivations de l'algèbre $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$.

On définit le fibré transverse Q d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de M comme le fibré vectoriel quotient $Q = TM/T\mathcal{F}$. Tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ définit une section différentiable $\bar{X}$ de Q. La section $\bar{X}$ de Q définie par le champ de vecteurs X s'exprime comme

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{q} \bar{X}^i \frac{\bar{\partial}}{\partial y^i}$$

où les $\bar{X}^i$ sont les q dernières composantes de X dans les coordonnées locales. Les fonctions $\bar{X}^i$sont appelées les composantes de $\bar{X}$ dans les coordonnées locales distinguées.

Le champ de vecteurs $\bar{X}$ est appelé champ de vecteurs transverse associé à X. L'espace des champs de vecteurs transverses est noté $l_{\mathcal{F}}(M)$. L'application

$$\mathcal{L}(M,\mathcal{F}) \longrightarrow l_{\mathcal{F}}(M), X \longmapsto \bar{X}$$

est une projection dont le noyau est $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Puisque $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ est un idéal de $\mathcal{L}(M,\mathcal{F})$, on peut munir $l_{\mathcal{F}}(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie réelle par la formule

$$[\bar{X},\bar{Y}] = \overline{[X,Y]}$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{L}(M,\mathcal{F})$, et ainsi on a le

Théorème 1.1. [MOLINO, 1988]. Pour tous X et $Y \in \mathcal{L}(M,\mathcal{F})$, l'application

$$l_{\mathcal{F}}(M) \times l_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow l_{\mathcal{F}}(M)$$
$$(\bar{X},\bar{Y}) \quad \longmapsto \quad [\bar{X},\bar{Y}] = \overline{[X,Y]}$$

est $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée et définit une structure d'algèbre de Lie réelle sur $l_{\mathcal{F}}(M)$. De plus pour tout $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a :

$$[\bar{X}, f\bar{Y}] = \bar{X}(f).\bar{Y} + f[\bar{X},\bar{Y}].$$

On rappelle que lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple, l'algèbre des fonctions lisses sur $M/\mathcal{F}$ est $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$. Ainsi, dans ce cas, $l_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires,

$$\bar{X} : C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$$

telles que

$$\bar{X}(fg) = \bar{X}(f).g + f.\bar{X}(g)$$

pour tous f et g dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, c'est-à-dire

$$l_{\mathcal{F}}(M) \simeq Der_{\mathbb{R}}[C_b^\infty(M,\mathcal{F})].$$

Nous rappelons dans la remarque ci-dessous un résultat classique de la théorie de feuilletage [MOLINO, 1988 ; TONDEUR, 1988].

Remarque 1.1. Une forme différentielle $\omega \in \Omega^r(M)$ est une forme différentielle sur l'espace des feuilles ou forme basique, c'est-à-dire $\omega \in \Omega_b^r(M,\mathcal{F})$ si et seulement si ω satisfait les conditions équivalentes suivantes

- pour $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, $i_X\omega = 0$, $i_X d\omega = 0$,
- pour $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, $i_X\omega = 0$, $L_X\omega = 0$,
- en coordonnées adaptées ω s'exprime comme

$$\omega = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le q} \omega_{i_1\dots i_r} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_r}$$

où les fonctions $\omega_{i_1\dots i_r}$ dépendent seulement des variables transverses $(y^1, \dots, y^q)$.

On collectionne toutes les formes basiques dans l'ensemble

$$\Omega_b(M,\mathcal{F}) = \oplus_{r=0}^{q} \Omega_b^r(M,\mathcal{F}).$$

Muni du produit extérieur, $\Omega_b(M,\mathcal{F})$ est une algèbre extérieure graduée. Il suit de la définition que le cobord d'une forme basique est de nouveau une forme basique. L'opérateur d induit le cobord basique

$$d_b : \Omega_b^r(M,\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega_b^{r+1}(M,\mathcal{F});\ \omega \longmapsto d_b\omega = d\omega$$

satisfaisant $d_b^2 = 0$. On peut alors définir la cohomologie basique du feuilletage [REINHART, 1959].

$$H_b(M,\mathcal{F}) = \oplus_{r=0}^{q} H_b^r(M,\mathcal{F})$$

où $H_b^r(M,\mathcal{F}) = \frac{\mathrm{Ker}\left(d_b : \Omega_b^r(M,\mathcal{F}) \to \Omega_b^{r+1}(M,\mathcal{F})\right)}{\mathrm{Im}\left(d_b : \Omega_b^{r-1}(M,\mathcal{F}) \to \Omega_b^{r}(M,\mathcal{F})\right)}$.

Dans une variété feuilletée $(M,\mathcal{F})$ la cohomologie basique joue le rôle de cohomologie de Rham de l'espace de feuilles $(M/\mathcal{F})$[REINHART, 1983; HOSTER, 2001].

En particulier, si $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple défini par une submersion $p : M \longrightarrow N$ alors les formes basiques sur $M/\mathcal{F}$ sont juste les images réciproques des formes différentielles sur la variété de base N.

Théorème 1.2. [MOLINO, 1988]. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage simple défini par une submersion $p : M \longrightarrow N$ entre deux variétés lisses, alors les algèbres graduées $\Omega_b(M,\mathcal{F})$ et $\Omega(N)$sont isomorphes.

On voit que pour un feuilletage simple, $\Omega_b(M,\mathcal{F})$ peut être identifié avec le $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module des formes multilinéaires alternées sur le $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module $l_{\mathcal{F}}(M)$. Cette identification n'est pas possible pour un feuilletage arbitraire.

2. Structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur l'espace des feuilles

L'objectif de cette section est de munir l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ d'un feuilletage simple $\mathcal{F}$ d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart. On sait que pour un feuilletage simple $\mathcal{F}$ sur M, l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ est une variété différentielle, $l_{\mathcal{F}}(M)$ est l'algèbre de Lie des dérivations de l'anneau $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ des fonctions basiques et $\Omega_b(M,\mathcal{F})$ est l'algèbre graduée de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-formes multilinéaires alternées sur $l_{\mathcal{F}}(M)$. Alors dans ce cas, nous pouvons définir les notions ci-dessous :

2.1 Opérateurs différentiels d'ordre $\leq \mathbf{1}$.

Dans cette partie, nous définissons le concept d'opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 sur l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ d'une variété feuilletée $(M,\mathcal{F})$ et nous étudions ses propriétés.

Définition 2.1. Un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 sur $M/\mathcal{F}$ est une application linéaire

$$\varphi : C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$$

telle que

$$\varphi(fg) = \varphi(f).g + f\varphi(g) - fg.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

pour f et g appartenant à $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ où $1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}$ est l'élément-unité de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$.

On note $D(M,\mathcal{F})$ le $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 sur $M/\mathcal{F}$.

Proposition 2.1 Un opérateur différentiel φ d'ordre ≤ 1 sur $M/\mathcal{F}$ est un champ de vecteur transverse si et seulement si $\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) = 0$.

Preuve.

1. Soit φ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 sur $\frac{M}{\mathcal{F}}$. Si φ est un champ de vecteurs transverse, alors pour tous f et g dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, nous avons d'une part

$$\varphi(fg) = \varphi(f).g + f.\varphi(g) - fg.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

et d'autre part

$$\varphi(fg) = \varphi(f).g + f.\varphi(g)$$

de sorte que $fg.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) = 0$ et $\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) = 0$.

2. Soit φ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 sur $M/\mathcal{F}$ tel que $\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) = 0$. Pour tous f et g dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a:

$$\varphi(fg) = \varphi(f).g + f.\varphi(g) - fg.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right).$$

Si $\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) = 0$,alors $\varphi(fg) = \varphi(f).g + f.\varphi(g)$.

Donc φ est un champ de vecteur transverse, c'est-à-dire φ vérifie l'identité de Leibnitz. ■

Si $\varphi : C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1, on note

$L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)} : C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ l'application qui expédie $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ sur $f\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$.

Théorème 2.1

L'application linéaire

$\varphi : C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$si et seulement si $\left(\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}\right)$ est une dérivation de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$.

Preuve.

1. Nous savons que $\varphi(fg) = \varphi(f).g + f.\varphi(g) - fg\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$ pour tous f et g dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left[\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}\right](fg) &= \varphi(fg) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(fg) \\
&= \varphi(f).g + f.\varphi(g) - \\
&\quad fg.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) \\
&\quad -\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right).fg \\
&= \left[\varphi(f) - \varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right).f\right].g \\
&\quad +f\left[\varphi(g) - g\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right] \\
&= \left[\varphi(f) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(f)\right].g \\
&\quad +f\left[\varphi(g) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(g)\right]
\end{aligned}$$

D'où $\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}$ est une dérivation.

2. Si $\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}$ est une dérivation, pour tous f et g dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a:

$$\left[\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}\right](fg) = \left(\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}\right)(f).g$$
$$+f.\left(\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}\right)(g)$$
$$= \left(\varphi(f) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(f)\right).g$$
$$+f.\left(\varphi(g) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(g)\right)$$
$$= \varphi(f).g - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(f).g + f.\varphi(g)$$
$$-f.L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(g)$$
$$= \varphi(f).g + f.\varphi(g) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(f).g$$
$$-f.L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(g)$$
$$= \varphi(f).g + f.\varphi(g) - fg\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$
$$-L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(fg).$$

D'autre part,

$$\left[\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}\right](fg) = \varphi(fg) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(fg).$$

Ainsi,

$$\varphi(fg) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(fg)$$
$$= \varphi(f).g + f.\varphi(g) - fg\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(fg);$$

Donc,

$$\varphi(fg) = \varphi(f).g + f.\varphi(g) - fg\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$
$$-L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(fg) + L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}(fg).$$

On voit clairement que

$$\varphi(fg) = \varphi(f).g + f.\varphi(g) - fg\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right),$$

alors φ est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1. ■

Théorème 2.2.

L'application

$$[,] : D(M,\mathcal{F}) \times D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow D(M,\mathcal{F}),$$
$$(\varphi,\psi) \longmapsto [\varphi,\psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$$

définit une structure d'algèbre de Lie réelle sur $D(M,\mathcal{F})$. De plus pour $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ et $\varphi,\psi \in D(M,\mathcal{F})$, on a

$$[\varphi, f.\psi] = \left[\varphi(f) - f\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right].\psi + f.[\varphi,\psi]$$

Preuve. Pour $\varphi,\psi \in D(M,\mathcal{F})$, l'application

$$[,] : D(M,\mathcal{F}) \times D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow D(M,\mathcal{F}),$$
$$(\varphi,\psi) \longmapsto [\varphi,\psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$$

est manifestement $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique.

Pour f et g dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on montre

$$[\varphi,\psi](f.g) = [\varphi,\psi](f).g + f.[\varphi,\psi](g) - f.g.[\varphi,\psi]\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

Ainsi, $[\varphi,\psi] \in D(M,\mathcal{F})$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a

$$[\varphi,\lambda\psi](f) = \varphi\big(\lambda.\psi(f)\big) - \lambda.\psi\big(\varphi(f)\big)$$
$$= \lambda.\varphi\big(\psi(f)\big) - \lambda\psi\big(\varphi(f)\big)$$
$$= \lambda\Big(\varphi\big(\psi(f)\big) - \psi\big(\varphi(f)\big)\Big)$$
$$= \lambda\big((\varphi\circ\psi)(f) - (\psi\circ\varphi)(f)\big)$$
$$= \lambda[\varphi,\psi](f)$$

Ainsi, $[\varphi,\lambda\psi] = \lambda[\varphi,\psi]$. C'est-à-dire l'application

$$[,] : D(M,\mathcal{F}) \times D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow D(M,\mathcal{F}),$$
$$(\varphi,\psi) \longmapsto [\varphi,\psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$$

est $\mathbb{R}$-bilinéaire et pour $\varphi,\psi \in D(M,\mathcal{F})$ et

pour $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, l'application

$$[\varphi,\psi] : C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \to C_b^\infty(M,\mathcal{F}),$$
$$f \to [\varphi,\psi](f) = \varphi\big(\psi(f)\big) - \psi\big(\varphi(f)\big)$$

est $\mathbb{R}$-linéaire et de plus, pour f et g dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$,

On a

$$[\varphi,f.\psi](g) = \varphi\big((f.\psi)(g)\big) - (f.\psi)\big(\varphi(g)\big)$$
$$= \varphi\big(f.\psi(g)\big) - f.\Big(\psi\big(\varphi(g)\big)\Big)$$
$$= \varphi(f).\psi(g) + f.\varphi\big(\psi(g)\big) - f.\psi(g).\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$
$$-f.\psi\big(\varphi(g)\big)$$

$$= (\varphi(f).\psi + f[\varphi,\psi])(g) - f.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right).\psi(g)$$
$$= \left[\varphi(f) - f.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right].\psi(g) + f[\varphi,\psi](g).$$

D'où

$$[\varphi, f.\psi] = \left[\varphi(f) - f.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right].\psi + f[\varphi,\psi]\blacksquare$$

Corollaire 2.1.

L'application

$$D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \oplus l_{\mathcal{F}}(M),$$

$$\varphi \longmapsto L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)} + \left(\varphi - L_{\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)}\right)$$

est un isomorphisme de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-modules.

Ainsi, on écrit

$$D(M,\mathcal{F}) = C_b^\infty(M,\mathcal{F}) \oplus l_{\mathcal{F}}(M)$$

Lorsque $\varphi \in D(M,\mathcal{F})$, on écrit $\varphi = f + \bar{X}$ avec $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ et $\bar{X} \in l_{\mathcal{F}}(M)$.

Proposition 2.2. Si $\varphi = f + \bar{X}$ et $\psi = g + \bar{Y}$ sont deux opérateurs différentiels sur $M/\mathcal{F}$, alors

$$[\varphi,\psi] = \bar{X}(g) - \bar{Y}(f) + [\bar{X},\bar{Y}].$$

Preuve.

Pour $h \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$. On a :

$$[\varphi,\psi](h) = (\varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi)(h)$$
$$= \varphi(\psi(h)) - \psi(\varphi(h))$$
$$= (f+\bar{X})((g+\bar{Y})(h)) - (g+\bar{Y})((f+\bar{X})(h))$$
$$= (f+\bar{X})\left((g.h+\bar{Y}(h))\right) - (g+\bar{Y})\left((f.h+\bar{X}(h))\right)$$
$$= f.g.h + f.\bar{Y}(h) + \bar{X}(g).h + g.\bar{X}(h) + \bar{X}\circ\bar{Y}(h) - g.f.h - g.\bar{X}(h) - \bar{Y}(f).h - f.\bar{Y}(h) - \bar{Y}\circ\bar{X}(h)$$
$$= \bar{X}(g).h - \bar{Y}(f).h + \bar{X}\circ\bar{Y}(h) - \bar{Y}\circ\bar{X}(h)$$
$$= \left(\bar{X}(g) - \bar{Y}(f)\right)(h) + [\bar{X},\bar{Y}](h)$$
$$= (\bar{X}(g) - \bar{Y}(f) + [\bar{X},\bar{Y}])(h)$$

Puisque la fonction h a été choisi arbitrairement, on déduit que

$$[\varphi,\psi] = \bar{X}(g) - \bar{Y}(f) + [\bar{X},\bar{Y}] \qquad \blacksquare$$

Corollaire 2.2.

Pour $\varphi \in D(M,\mathcal{F})$, on a:

$$\left[\varphi, 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right] = 0.$$

Preuve. On rappelle que si $\varphi = f + \bar{X}$ et $\psi = g + \bar{Y}$ sont deux opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, avec f et g $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ éléments de $l_{\mathcal{F}}(M)$.

On a $[\varphi,\psi] = \bar{X}(g) - \bar{Y}(f) + [\bar{X},\bar{Y}]$.

Ainsi, pour $\varphi = \bar{X} + f, \psi = \bar{Y} + 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}$ avec $\bar{Y} = 0$ élément de $l_{\mathcal{F}}(M)$, on a:

$$\left[\varphi, 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right] = \left[\bar{X} + f, \bar{Y} + 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right]$$
$$= \bar{X}\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) - O(f) + [\bar{X}, O]$$
$$= O \qquad \blacksquare$$

Proposition 2.3. Pour $\varphi \in D(M,\mathcal{F})$ et $f, g \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a

$$[\varphi, f] = \varphi(f) - f.\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right).$$
$$[f,g] = 0$$

Preuve.

1. Pour tout $\varphi \in D(M,\mathcal{F})$ et $\psi = 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \in D(M,\mathcal{F})$, $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$; on a:

$$[\varphi, f] = \left[\varphi, f.1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right]$$
$$= \left(\varphi(f) - f\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right)\psi + f[\varphi,\psi]$$
$$= \left(\varphi(f) - f\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right).1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} + f\left[\varphi, 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right]$$
$$= \varphi(f) - f\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right).$$

2. La démnstration est immédiate. $\blacksquare$

Corollaire 2.3.

Lorsque $\bar{X}$ est un champ de vecteurs transverse sur $M/\mathcal{F}$ et $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$,

on a :

$$[\bar{X}, f] = \bar{X}(f).$$

Structures d'algèbres de Lie-Rinehart sur l'espace des feuilles.

Structures d'algèbres de Lie-Rinehart sur le $\boldsymbol{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}$-module $\boldsymbol{D(M,\mathcal{F})}$

L'application

$$Id: D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow D(M,\mathcal{F})$$

est une représentation de $D(M,\mathcal{F})$ dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$.

Lorsque $\alpha : l_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ est une forme basique linéaire sur $l_{\mathcal{F}}(M)$, on note

$$\tilde{\alpha} : D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$$

une forme basique linéaire sur $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module $D(M,\mathcal{F})$ telle que $\tilde{\alpha}_{|C_b^\infty(M,\mathcal{F})} = 0$ et $\tilde{\alpha}_{|l_{\mathcal{F}}(M)} = \alpha$.

Proposition 2.2.1.1. Si $\tilde{\alpha} : D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ est une forme linéaire sur $D(M,\mathcal{F})$. Alors $i_{1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}} d_{b_{id}}\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$.

Preuve.

Pour $\varphi \in D(M,\mathcal{F})$, on a

$$\begin{aligned}
i_{1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}} d_{b_{id}}\tilde{\alpha}(\varphi) &= d_{b_{id}}\tilde{\alpha}\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}, \varphi\right) \\
&= id\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\tilde{\alpha}(\varphi) - id(\varphi)\tilde{\alpha}\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) \\
&\quad -\tilde{\alpha}\left[1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}, \varphi\right] \\
&= 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\tilde{\alpha}(\varphi) - \varphi\tilde{\alpha}\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) - \tilde{\alpha}\left[1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}, \varphi\right] \\
&= \tilde{\alpha}(\varphi) + \tilde{\alpha}\left[\varphi, 1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right] \\
&= \tilde{\alpha}(\varphi)
\end{aligned}$$

Comme φ est quelconque dans $D(M,\mathcal{F})$, on déduit que $i_{1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}} d_{b_{id}}\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$. ■

Proposition 2.2.1.2.

Pour toute forme linéaire $\tilde{\alpha}$ sur $D(M,\mathcal{F})$,l'application

$$\rho_{\tilde{\alpha}} : D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow D(M,\mathcal{F}), \varphi \longmapsto \varphi + \tilde{\alpha}(\varphi)$$

est $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-linéaire.

Preuve.

Pour $\varphi = \varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X} \in D(M,\mathcal{F})$,

$g \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$.

On a :$\rho_{\tilde{\alpha}}(g\varphi) = g\varphi + \tilde{\alpha}(g\varphi)$

$$\begin{aligned}
&= g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right) + \tilde{\alpha}\left(g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right)\right) \\
&= g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right) + \tilde{\alpha}\left(g\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + g\bar{X}\right) \\
&= g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right) + \tilde{\alpha}\left(g\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right) + \tilde{\alpha}(g\bar{X}) \\
&= g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right) + g.0 + g\alpha(\bar{X}) \\
&= g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right) + g\left(0 + \alpha(\bar{X})\right) \\
&= g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right) + g\left(\tilde{\alpha}\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \tilde{\alpha}(\bar{X})\right)\right) \\
&= g\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right) + g\left(\tilde{\alpha}\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) + \bar{X}\right)\right) \\
&= g\varphi + g\tilde{\alpha}(\varphi) \\
&= g\left(\varphi + \tilde{\alpha}(\varphi)\right) \\
&= g\rho_{\tilde{\alpha}}(\varphi)
\end{aligned}$$
■

Proposition 2.2.1.3.

Pour toute forme linéaire $\tilde{\alpha}$ sur $D(M,\mathcal{F})$, l'application

$$\rho_{\tilde{\alpha}} : D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow D(M,\mathcal{F}), \varphi \longmapsto \varphi + \tilde{\alpha}(\varphi)$$

est un morphisme d'algèbres de Lie réelles si

$$d_{b_{id}}\tilde{\alpha} = d_{b_{id}}1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \wedge \tilde{\alpha}.$$

Preuve.

Pour tous φ et ψ dans $D(M,\mathcal{F})$, on a

$$\begin{aligned}
&[\rho_{\tilde{\alpha}}(\varphi), \rho_{\tilde{\alpha}}(\psi)] - \rho_{\tilde{\alpha}}[\varphi,\psi] \\
&= [\varphi + \tilde{\alpha}(\varphi), \psi + \tilde{\alpha}(\psi)] - [\varphi,\psi] - \tilde{\alpha}[\varphi,\psi] \\
&= [\varphi,\psi] + [\varphi, \tilde{\alpha}(\psi)] + [\tilde{\alpha}(\varphi), \psi] + [\tilde{\alpha}(\varphi), \tilde{\alpha}(\psi)] - [\varphi,\psi] \\
&\quad -\tilde{\alpha}[\varphi,\psi] \\
&= \varphi(\tilde{\alpha}(\psi)) - \tilde{\alpha}(\psi)\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) - \psi(\tilde{\alpha}(\varphi)) \\
&\quad +\tilde{\alpha}(\varphi)\psi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) - \tilde{\alpha}[\varphi,\psi] \\
&= \varphi(\tilde{\alpha}(\psi)) - \psi(\tilde{\alpha}(\varphi)) - \tilde{\alpha}[\varphi,\psi] \\
&\quad -\left(\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\tilde{\alpha}(\psi) - \psi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\tilde{\alpha}(\varphi)\right) \\
&= d_{b_{id}}\tilde{\alpha}(\varphi,\psi) - \left(d_{b_{id}}1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \wedge \tilde{\alpha}\right)(\varphi,\psi) \\
&= \left(d_{b_{id}}\tilde{\alpha} - d_{b_{id}}1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \wedge \tilde{\alpha}\right)(\varphi,\psi).
\end{aligned}$$

Puisque $\rho_{\tilde{\alpha}}$ est un morphisme d'algèbre de Lie, donc

$[\rho_{\tilde{\alpha}}(\varphi), \rho_{\tilde{\alpha}}(\psi)] = \rho_{\tilde{\alpha}}[\varphi,\psi]$ si

$$d_{b_{id}}\tilde{\alpha} - d_{b_{id}}1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \wedge \tilde{\alpha} = 0$$

c'est-à-dire $d_{b_{id}}\tilde{\alpha} = d_{b_{id}}1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \wedge \tilde{\alpha}$. ■

Théorème 2.2.1.1.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage simple définie sur une variété lisse M. Le $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module des opérateurs différentiels d'ordre $\leq$ 1sur $(M/\mathcal{F})$ admet une structure d'algèbre de Lie-Rinehart s'il existe une forme linéaire

$$\tilde{\alpha} : D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$$

et une application $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-linéaire

$$\rho_{\tilde{\alpha}} : D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow D(M,\mathcal{F})$$

telles que $d_{b_{id}}\tilde{\alpha} = d_{b_{id}}1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \wedge \tilde{\alpha}$ où $d_{b_{id}}$ est l'opérateur de cohomologie basique associé à la représentation id,

$\tilde{\alpha}_{|l_{\mathcal{F}}(M)} \equiv \alpha : l_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ et $\tilde{\alpha}_{|C_b^\infty(M,\mathcal{F})} = 0$.

Preuve. Pour la condition nécessaire, soit ρ une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur $D(M,\mathcal{F})$. Pour $\varphi \in D(M,\mathcal{F})$ et $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a d'une part

$$[\varphi, f] = [\rho(\varphi)](f) - f[\rho(\varphi)]\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

et d'autre part,

$$[\varphi, f] = \varphi(f) - f\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

de sorte que

$$[\rho(\varphi)](f) - f[\rho(\varphi)]\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) = \varphi(f) - f\varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

et

$$[\rho(\varphi)](f) = \varphi(f) + f\left([\rho(\varphi)]\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right) - \varphi\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right).$$

Ainsi, l'application

$$\tilde{\alpha} : D(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C_b^\infty(M,\mathcal{F})$$
$$\varphi \quad \longmapsto [\rho(\varphi) - \varphi]\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

est une $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-linéaire, d'où

$$[\rho(\varphi)](f) = \varphi(f) + f\tilde{\alpha}(\varphi)$$

Puisque f est quelconque dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a

$$\rho(\varphi) = \varphi + \tilde{\alpha}(\varphi).$$

On conclut que $\rho = \rho_{\tilde{\alpha}}$.

Il suit de la définition de ρ que $\rho_{\tilde{\alpha}}$ est un morphisme d'algèbres de Lie réelles. On a que $\tilde{\alpha}$ est telle que $d_{b_{id}}\tilde{\alpha} = d_{b_{id}}1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})} \wedge \tilde{\alpha}$.

Pour la condition suffisante, voir la Proposition 2.2.1.3. ■

Structures d'algèbres de Lie-Rinehart sur le $\boldsymbol{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}$-module $\boldsymbol{l_\mathcal{F}(M)}$

Dans cette partie, nous définissons le concept de structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module $l_\mathcal{F}(M)$.

Définition 2.2.2.1.

Une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur l'espace des feuilles $(M/\mathcal{F})$ est donnée par un morphisme de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-modules et d'algèbres de Lie réelles

$$\rho : l_\mathcal{F}(M) \to D(M,\mathcal{F})$$

qui est $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-linéaire et tel que pour tous $\bar{X},\bar{Y} \in l_\mathcal{F}(M)$ et pour tout $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ on a

$$[\bar{X}, f\bar{Y}] = \left[\rho(\bar{X})(f) - f.\rho(\bar{X})\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right].\bar{Y} + f.[\bar{X},\bar{Y}].$$

On dit que le couple $(l_\mathcal{F}(M),\rho)$ est une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur l'espace de feuilles $M/\mathcal{F}$.

Théorème 2.2.2.1. Soit $(l_\mathcal{F}(M),\rho)$ une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur l'espace de feuilles $M/\mathcal{F}$. Il existe une forme basique linéaire sur $M/\mathcal{F}$.

$$\alpha : l_\mathcal{F}(M) \to C_b^\infty(M,\mathcal{F})$$

telle que $\rho(\bar{X})(f) = (\bar{X})(f) + f.\alpha(\bar{X})$.

Preuve.

Pour $\bar{X},\bar{Y} \in l_\mathcal{F}(M)$, on a

$$[\bar{X}, f\bar{Y}] = \bar{X}(f).\bar{Y} + f.[\bar{X},\bar{Y}].$$

Puisque $(l_\mathcal{F}(M),\rho)$ est une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur l'espace de feuilles $M/\mathcal{F}$, alors pour $\bar{X},\bar{Y} \in l_\mathcal{F}(M)$ et pour tout $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$

$$[\bar{X}, f\bar{Y}] = \left[\rho(\bar{X})(f) - f\rho(\bar{X})\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)\right].\bar{Y} + f[\bar{X},\bar{Y}].$$

Ainsi,

$$\bar{X}(f) = \rho(\bar{X})(f) - f\rho(\bar{X})\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

c'est-à-dire

$$\rho(\bar{X})(f) = \bar{X}(f) + f\rho(\bar{X})\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

alors, l'application

$$\alpha : l_\mathcal{F}(M) \to C_b^\infty(M,\mathcal{F}), \bar{X} \longmapsto \rho(\bar{X})\left(1_{C_b^\infty(M,\mathcal{F})}\right)$$

est une forme basique linéaire sur l'espace de feuilles $M/\mathcal{F}$.

D'où $\rho(\bar{X})(f) = \bar{X}(f) + f\alpha(\bar{X})$. ■

Proposition 2.2.2.1. Si d_b est l'opérateur de cohomologie basique associé à la représentation $\rho : l_\mathcal{F}(M) \to D(M,\mathcal{F}), \bar{X} \longmapsto \bar{X} + \alpha(\bar{X})$, alors la forme basique linéaire α est d_b-fermée.

$$\begin{aligned}
&([\rho(\bar{X}),\rho(\bar{Y})] - \rho[\bar{X},\bar{Y}])(f) = [\rho(\bar{X}),\rho(\bar{Y})](f) - \rho[\bar{X},\bar{Y}](f)\\
&= [\bar{X}+\alpha(\bar{X}), \bar{Y}+\alpha(\bar{Y})](f) - [\bar{X},\bar{Y}](f) - \alpha[\bar{X},\bar{Y}](f)\\
&= [\bar{X},\bar{Y}](f) + [\bar{X},\alpha(\bar{Y})](f) + [\alpha(\bar{X}),\bar{Y}](f) + [\alpha(\bar{X}),\alpha(\bar{Y})](f)\\
&\quad -[\bar{X},\bar{Y}](f) - \alpha[\bar{X},\bar{Y}](f)\\
&= \bar{X}\big(\alpha(\bar{Y})\big).f - \bar{Y}\big(\alpha(\bar{X})\big).f - \alpha[\bar{X},\bar{Y}](f)\\
&= \big(\bar{X}.\big(\alpha(\bar{Y})\big) - \bar{Y}.\alpha(\bar{X}) - \alpha[\bar{X},\bar{Y}]\big)(f)\\
&= f.d_b\alpha(\bar{X},\bar{Y}).
\end{aligned}$$

Preuve. Pour $\bar{X},\bar{Y} \in l_\mathcal{F}(M)$ et pour $f \in C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a:

Comme f est pris arbitrairement dans $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$, on a $[\rho(\bar{X}),\rho(\bar{Y})] - \rho[\bar{X},\bar{Y}] = d_b\alpha(\bar{X},\bar{Y})$. Puisque ρ est un morphisme d'algèbres de Lie, on a:

$[\rho(\bar{X}),\rho(\bar{Y})]=\rho[\bar{X},\bar{Y}]$si $d_b\alpha(\bar{X},\bar{Y})=0$, c'est-à-dire α est d_b-fermée. ∎

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous avons montré que l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ d'un feuilletage simple $\mathcal{F}$ sur une variété lisse M peut être muni d'une structure de Lie-Rinehart. Une question se pose de manière naturelle, à savoir : peut-on caractériser les structures feuilletées en termes d'algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi-symplectique ou encore en termes d'algèbre de Lie-Rinehart-Poisson-Symplectique?

RESUME

On considère un feuilletage transversalement orienté $\mathcal{F}$défini sur une variété différentielle M. On note $M/\mathcal{F}$ l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$, $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$ son anneau des fonctions basiques, $l_{\mathcal{F}}(M)$ son $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module des champs de vecteurs transverses sur $M/\mathcal{F}$ et $Diff_{\mathbb{R}}[C_b^\infty(M,\mathcal{F})]$ le $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$-module des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 de $C_b^\infty(M,\mathcal{F})$. Nous établissons que si $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple sur M, son espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart et en déduisons qu'il n'est pas possible de munir l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$ d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart si $\mathcal{F}$ n'est pas simple.

Mots Clés

Espace des feuilles, feuilletage simple, champs de vecteurs transverses, opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1, algèbre de Lie-Rinehart.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient les Professeurs OKASSA E. et BOSSOTO B.G.R. de l'Université Marien-Ngouabi de la République du Congo pour leurs conseils et pour avoir mis à leur disposition la documentation sur les algèbres de Lie-Rinehart.

REFERENCES

GODBILLON C. [1991]. Feuilletage. Etudes Géométriques, Progress in Mathematics Birkhausser.

HECTOR G., HIRSCH U. [1981]. Introduction to the geometry of foliations, Parts A and B, vieweg, Braunschweig.

HOSTER M. [2001]. Derived Secondary Classes for Flags of Foliations, Ph. D Thesis, Universitat Munchen.

MOLINO P. [1988]. Riemannian Foliations, Progress in Mathematics, Birkhauser.

MUSESA L.A. [2005]. On the invariants of transversally oriented Foliations and Confoliations, PhD. Thesis, université d'Abomey-Calavi (UAC), Benin.

REINHART B. [1983]. Differential geometry of foliations.Ergeb.Math., Grenzgeb.99, Springer-verlag, Berlin.

TONDEUR P. [1988]. Foliations on Riemannian Manifolds, universitext, Springer-verlag, New York.

TONDEUR P. [1997]. Geometry of foliations, Monographs in Mathematics, Birkhäuser.